

контактным площадкам соединения, то есть то его значение, которое имело бы место при равномерно распределенной по всей площадке контактной нагрузке. Поскольку при тепловом ударе вначале происходит более интенсивный подогрев хвостовика лопатки, верхний зуб соединения догружается, а на нижнем – напряжения падают. После дальнейшего прогрева конструкции контактные напряжения выравниваются.

Таким образом, расчет термонапряженного состояния замковых соединений с учетом воздействия тепловых потоков в рамках термоконтактной задачи существенно уточняет математическую модель конструкции, приближая ее к реальному объекту, что особенно важно для газотурбинных установок, где тепловые потоки интенсивны. Подобные расчеты позволяют исследовать влияние температурных воздействий и различных условий теплообмена на напряженное состояние соединений, на величину и характер распределения контактных давлений, что в свою очередь позволяет объяснить причины снижения длительной прочности машиностроительных конструкций.

Список литературы. 1. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / *А.Н.Подгорный, П.П.Гонтаровский, Б.Н.Киркач, Ю.И.Матюхин, Г.Л.Хавин*. – Киев: Наук. думка, 1989. – 232 с. **2.** *Гармаш Н.Г.* Двовимірний скінченноелементний аналіз контактних задач із врахуванням теплообміну. – Автореф.дисерт. на здоб. наук. ступ. канд. техн. наук. – Харків, 1999. – 19 с. **3.** *Гармаш Н.Г.* Напряженное состояние замкового соединения лопаток газовой турбины в рамках термоконтактной задачи / *Н.Г.Гармаш, В.П.Гонтаровский* // Пробл. машиностроения. – 2001. – Т. 4, № 3-4. – С. 12-16. **4.** *Гонтаровский П.П.* К решению контактных задач МКЭ с учетом фрикционного нагрева / *П.П.Гонтаровский, Н.Г.Гармаш* // Динаміка і міцність машин. – Харків. Вісник НТУ «ХПІ». – 2001. – № 25. – С. 67-74. **5.** *Гонтаровский П.П.* Расчет напряженно-деформированного состояния лопаток турбомашин с учетом термоконтактных взаимодействий/ *П.П.Гонтаровский, Н.Г.Гармаш* // Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования: Сб. тр. Межд. науч.-тех. конф. – Харьков, 29 сент. – 2 окт. 1997г. – Харьков. – 1997. – С. 533-536.

Поступила в редакцию 19.04.2006

УДК 532.595

В.И.ГНИТЬКО, канд. техн. наук;

Е.В.ЕСЕЛЕВА, канд. техн. наук; ИПМаш НАН Украины

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

Запропоновано метод визначення власних частот і форм коливань пружних оболонок обертання, частково заповнених рідиною. Форми коливань оболонки з рідиною визначаються як лінійна комбінація власних форм її коливань в вакуумі. Розв'язок задач гідропружності отримано з використанням методів граничних інтегральних рівнянь і скінченних елементів. Проведено чисельні дослідження гідропружних коливань напівсферичної оболонки.

The computational method for fluid shell interaction eigenproblems is proposed. Natural modes of the shell under fluid interaction are evaluated as superposition of its elastic natural modes. The methods of boundary and finite elements are applied for hydroelastic problem. As an interaction example, a hemispherical shell filled with fluid is demonstrated.

Задачи динамики тела с полостями, частично заполненными жидкостью, составляют один из важных для практики разделов механики. К их решению приводят проблемы определения силового взаимодействия подвижной цистерны и жидкости, расчета на прочность емкостей с жидкостью в сейсмоактивных районах, вопросы динамики и устойчивости танкеров и объектов аэрокосмической техники. Изучению динамических характеристик тел с полостями, заполненными жидкостью, посвящена обширная литература, в частности [1-5]. В большинстве из этих работ решение задачи ищется в виде ряда по системе специальных функций, такой подход сложно обобщить на случай оболочек вращения с произвольным меридианом. В данной работе для решения задачи о собственных гидроупругих колебаниях оболочки вращения предлагается подход, основанный на использовании методов граничных элементов (МГЭ) и конечных элементов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях упругой оболочки вращения, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью.

Матричное уравнение движения оболочки с жидкостью запишем в виде

$$LU + M\ddot{U} = P, \quad (1)$$

где L , M – матрицы жесткости и масс; $U = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор-функция перемещений; P – давление жидкости на смоченную поверхность оболочки.

При изучении собственных колебаний оболочки примем

$$U(P, t) = u(P)e^{i\Omega t}, \quad (2)$$

где Ω – собственная частота; u – собственная форма колебаний оболочки с жидкостью; $P(x, y, z)$ – точка на поверхности оболочки.

Как в работе [6], будем искать собственные формы колебаний оболочки с жидкостью в виде линейной комбинации собственных форм ее колебаний в вакууме

$$u = \sum_{k=1}^N c_k u_k, \quad (3)$$

где c_k – неизвестные коэффициенты; u_k – собственные формы колебаний оболочки в вакууме. Отметим, что выполняются следующие соотношения:

$$Lu_k = \omega_k^2 Mu_k, \quad (Mu_k, u_j) = \delta_{kj}. \quad (4)$$

где ω_k – k -я частота собственных колебаний в вакууме.

Предположим, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее течение (индуцированное колебаниями оболочки) является безвихревым. Эти допущения позволяют считать возмущенное движение жидкости потенциальным с потенциалом скоростей $\Phi(x, y, z, t)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа. Заметим, что вектор давления P направлен по нормали к поверхности оболочки вследствие того, что идеальная жидкость создает только нормальное давление на смоченном теле. Обозначим $|P| = p$.

В случае гармонических колебаний жидкости примем

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z)e^{i\Omega t}.$$

Давление жидкости определим в соответствии с интегралом Коши-Лагранжа [7] в предположении, что собственная скорость жидкости равна нулю:

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -i\rho\Omega\varphi e^{i\Omega t}, \quad (5)$$

где ρ – плотность жидкости.

С учетом (2) и (5) уравнение (1) принимает вид

$$(\mathbf{L} - \Omega^2 \mathbf{M})\mathbf{u} = -i\rho\Omega\varphi. \quad (6)$$

Краевая задача для функции $\varphi(x, y, z)$ формулируется следующим образом:

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = i\Omega w, \quad P_i \in S_1, \quad (8)$$

$$p = -i\rho\Omega\varphi e^{i\Omega t} = 0, \quad P_i \in S_0, \quad (9)$$

Здесь w – нормальная составляющая перемещений оболочки, S_1 – смачиваемая поверхность оболочки, S_0 – свободная поверхность жидкости.

Таким образом, задача сводится к отысканию функций \mathbf{u} , φ , удовлетворяющих уравнению колебаний (6), условиям непротекания (8) на поверхности оболочки и отсутствия давления на свободной поверхности (9).

Обозначим через φ_k решение смешанной задачи для уравнения Лапласа (7)–(9). В символической форме это решение можно записать в виде

$$\varphi_k(P_0) = i\Omega \mathbf{H}(w_k(P_0)). \quad (10)$$

Здесь $\mathbf{H}(w_k(P_0))$ – обратный оператор гидродинамической задачи; w_k – нормальные составляющие собственных форм колебаний оболочки в вакууме.

Подставим (3) в уравнение (6) и учтем, что в силу линейности задачи

$$\varphi = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k. \quad (11)$$

Получим

$$\mathbf{L} \left(\sum_{k=1}^N c_k \mathbf{u}_k \right) - \Omega^2 \mathbf{M} \left(\sum_{k=1}^N c_k \mathbf{u}_k \right) = i\Omega \rho \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k. \quad (12)$$

В соотношение (12) подставим выражение (10) и умножим скалярно полученное равенство на w_j . Будем иметь, с учетом выполнения условий (4),

$$(\omega_k^2 \delta_{kj} + \delta_{kj}) c_j = \Omega^2 \rho \sum_{k=1}^N c_k (\mathbf{H}(w_k) \cdot w_j). \quad (13)$$

Соотношение (13) представляет собой обобщенную проблему собственных значений. Решив эту проблему, определим собственные частоты Ω_k колебаний оболочки с жидкостью и неизвестные коэффициенты c_k , которые являются коэффициентами при собственных формах колебаний оболочки в вакууме.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к последовательному

определению частот ω_k и форм w_k оболочки в вакууме, решению смешанных задач для уравнения Лапласа (7), построению матрицы присоединенных масс жидкости $\rho(\mathbf{H}(w_k) \cdot w_j)$ и решению обобщенной проблемы собственных значений (13). Отметим, что определение гармонической функции ϕ можно осуществить разными методами. Например, в работе [5] для этой цели использован метод конечных элементов. Мы же будем использовать метод граничных интегральных уравнений.

2. Определение давления жидкости на оболочку. Для определения потенциала скоростей (11) и, следовательно, давления жидкости на оболочку требуется решить смешанную задачу для уравнения Лапласа (7)–(9).

Будем искать гармоническую функцию ϕ в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев [8], т. е. используем прямую формулировку метода граничных интегральных уравнений

$$2\pi\phi(P_0) = \iint_S \frac{\partial\phi}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS - \iint_S \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS. \quad (14)$$

Здесь предполагается, что $S = S_1 \cup S_0$; точки P и P_0 принадлежат поверхности S . Величина $|P - P_0|$ представляет собой декартово расстояние между точками P и P_0 .

Для смешанной задачи (7)–(9) представление (14) приводит к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$2\pi\phi(P_0) + \iint_{S_1} \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS_1 - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P - P_0|} dS_0 = \iint_{S_1} w \frac{1}{|P - P_0|} dS_1; \quad P_0 \in S_1, \\ \iint_{S_1} \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS_1 - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P - P_0|} dS_0 = \iint_{S_1} w \frac{1}{|P - P_0|} dS_1; \quad P_0 \in S_0 \quad (15)$$

относительно неизвестных функций ϕ и q . При этом функция ϕ , определенная на поверхности S_1 , представляет собой давление на смоченную поверхность оболочки, а функция q , определенная на поверхности S_0 , – нормальную составляющую скорости жидкости на свободной поверхности.

Поскольку S_1 – оболочка вращения, будем искать решение системы интегральных уравнений (15) в виде

$$w = w(r, z) \cos \alpha \theta, \quad \phi = \phi(r, z) \cos \alpha \theta.$$

Расстояние между точками оболочки вращения в цилиндрических координатах r, z, θ определяется формулой

$$|P - P_0| = \sqrt{r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)}.$$

В дальнейшем будем пользоваться стандартными обозначениями [9]

$$a = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2; \quad b = 2rr_0; \quad k^2 = \frac{2b}{a + b}.$$

Вычислим производную по нормали

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} = - \frac{n_r [r - r_0 \cos(\theta - \theta_0)] + n_z (z - z_0)}{(\sqrt{a - b \cos(\theta - \theta_0)})^3}, \quad (16)$$

где n_r, n_z – компоненты нормали к поверхности оболочки.

Выполним далее преобразования (16), подробно проведенные в [10], с целью сведения ядер в (15) к стандартным эллиптическим интегралам. После преобразований система (15) принимает окончательный вид

$$2\pi\phi(z_0) + \int_{\Gamma} \phi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(p) \Psi(P, P_0) p dp = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma; P_0 \in S_1$$

$$\int_{\Gamma} \phi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(p) \Psi(P, P_0) p dp = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma; P_0 \in S_0. \quad (17)$$

Здесь

$$Q(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_\alpha(k) - F_\alpha(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_\alpha(k) n_z \right\};$$

$$\Psi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_\alpha(k).$$

$$F_\alpha(k) = (-1)^\alpha \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},$$

$$E_\alpha(k) = (-1)^\alpha (1 - 4\alpha^2) \int_0^{\pi/2} \cos 2\alpha\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \quad (18)$$

Γ – образующая поверхности S_1 , p – полярная координата на поверхности S_0 . Интегралы (17), (18) вычисляются численно по 6-точечным формулам Гаусса.

Для решения системы (17) использован метод граничных элементов с постоянной аппроксимацией плотности на элементе [9].

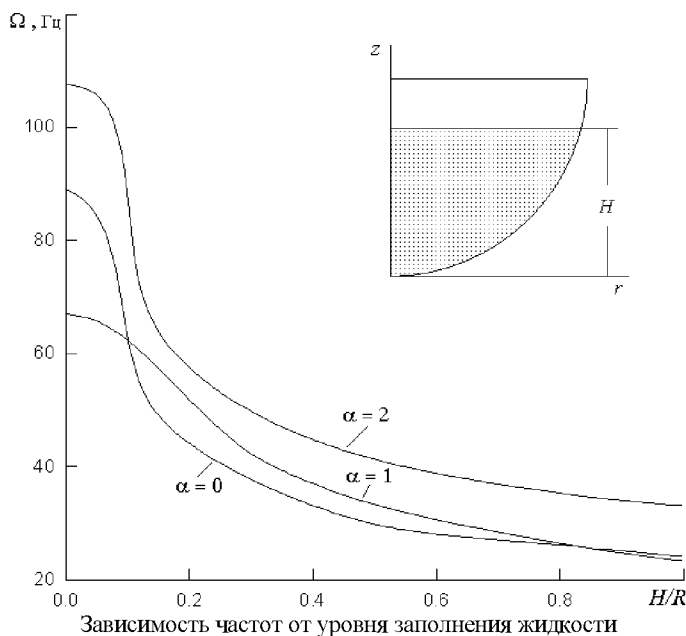
Отметим, что для определения частот и форм собственных колебаний оболочки в вакууме используется полуаналитический метод конечных элементов. Неизвестные функции представлены в виде рядов Фурье по окружной координате, таким образом, двумерная задача сводится к ряду одномерных. Геометрия конечного элемента и функции перемещений аппроксимируются кубическими полиномами [11].

3. Собственные частоты колебаний полусферической оболочки с жидкостью. Рассмотрена задача о собственных колебаниях полусферической оболочки, заполненной жидкостью при различных уровнях H (см. рисунок). Оболочка имеет следующие параметры: радиус $R = 2,54$ м; толщина $h = 0,0254$ м; модуль упругости $E = 10$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; плотность материала $\rho = 2770$ кг/м³. Плотность жидкости 1000 кг/м³. Условия закрепления – шарнирное опирание по контуру оболочки.

В таблице приведены три первых собственных частоты колебаний оболочки, заполненной жидкостью при $H/R = 1$, для $\alpha=0$ (осесимметричные колебания). Сравнение полученных результатов с данными работы [5] показало их хорошее согласование.

На рисунке приведены графики изменения низшей частоты оболочки для $\alpha = 0; 1; 2$ в зависимости от уровня заполнения жидкости. Как видно, характер этих зависимостей является монотонным.

Собственные частоты колебаний оболочки, Гц		
Ω	МГЭ	[5]
1	23,68	23,69
2	35,31	35,49
3	43,44	44,03



Проведенные численные исследования собственных частот и форм полусферической оболочки, заполненной жидкостью, подтверждают достоверность разработанного подхода. Полученные результаты станут основой для дальнейшего исследования поведения конструкций, взаимодействующих с жидкостью, при их динамическом нагружении.

Список литературы: 1. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 440 с. 2. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твер-

дого тела с полостями, содержащими жидкость. – Киев: Наукова думка, 1990. – 296 с. 3. *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* Nonlinear problems of the dynamics of elastic shells partially filled with a liquid // Intern. Appl. Mech. – 2000. – **36**, № 4. – P. 421–448. 4. *Богоряд И.Б., Дружинин И.А., Дружинина Г.З., Либин Э.Е.* Введение в динамику сосудов с жидкостью. – Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1977. – 144 с. 5. *Мокеев В.В.* О решении матричных уравнений при конечно-элементном моделировании жидкости по Лагранжу в задачах гидроупругости // Динамика, прочность и износостойкость машин. – 1999. – № 6. – С.11-17. 6. *Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А.* К теории собственных колебаний конструкций, содержащих жидкость // Доп. НАН України. – 2001. – № 10. – С. 61-65. 7. *Валландер С.В.* Лекции по гидроаэромеханике. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1978. – 296 с. 8. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. – М.: Физматгиз, 1968. – 576 с. 9. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с. 10. *Еселева Е.В., Гнистько В.И., Стрельникова Е.А.* Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью // Пробл. машиностроения. – 2006. – № 1. – С. 105-118. 11. *Гнистько В.И., Мерзляков В.А.* Расчет неосесимметричного термоупругопластического состояния разветвленных оболочек вращения полуаналитическим методом конечных элементов // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 8. – С.105-115.

Поступила в редколлегию 01.03.2006

УДК 539.434

Є.М. ГОРАШ, НТУ «ХПІ»

ЗАСТОСУВАННЯ ІЗОТРОПНОЇ ТА АНІЗОТРОПНОЇ КОНЦЕПЦІЙ ПОШКОДЖУВАНOSTІ ДО РОЗРАХУНКУ ТРИВАЛОЇ МІЦНОСТІ РОТОРУ ПАРОВОЇ ТУРБИНИ В УМОВАХ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОЇ ПОВЗУЧОСТІ

У рамках дослідницької роботи дві типові моделі поведінки матеріалу, які описують ізотропну й анізотропну повзучість з урахуванням пошкоджуваності в металах і сплавах, застосовані для симуляції механічного поведінки ротора парової турбіни в його експлуатаційних умовах. Чисельні рішення початково-крайових задач одержують за допомогою МСЕ, використовуючи твердотільні вісесиметричні скінченні елементи. З метою адекватного розрахунку тривалої міцності обидві моделі повзучості були імplementовані в СЕ код програмного комплексу ANSYS. Отримані для ротора парової турбіни результати показують істотну залежність часу життя конструкції від типу моделі матеріалу.

Within the framework of the research work two typical material models describing isotropic and anisotropic creep-damage processes in metals and alloys are applied to the simulation of the mechanical behaviour of a steam turbine rotor in its service conditions. Numerical solutions of the initial-boundary value problems have been obtained by FEM using solid axisymmetrical type finite elements. For the purpose of adequate long-term strength analysis both isotropic and anisotropic creep-damage models have been implemented in FE-code of the universal CAE ANSYS. Obtained simulation results for a steam turbine rotor show the significant sensitivity of life-time assessment to the type of material model.

Огляд моделей високотемпературної повзучості. Повзучість супроводжується залежними від часу деформаціями й процесами пошкодження мікроструктури матеріалу конструкції, які включають зародження й ріст мікро-